www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

**ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)
CONCOURS D'ADMISSION 1989**

MATHEMATIQUES

**PREMIERE EPREUVE
OPTIONS M, P'
(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHEMATIQUES I - M, P'.

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 5 pages.

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$ sur le corps des réels ; le produit scalaire et la norme associée sont notés $(\mid)$ et $\| \|$.

Etant donné un sous-espace vectoriel G de E, on note $G^{\perp}$ l'orthogonal de G dans E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est somme directe orthogonale de r sous-espaces vectoriels F_1 , F_2 ,..., F_r de E si $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_r$ et si ces sous-espaces sont orthogonaux deux à deux.

Dans tout le problème, on suppose donnés deux sous-espaces E_1 et E_2 de E dont E est somme directe orthogonale, de dimensions respectives non nulles p et n-p .

On suppose données des bases orthonormales $B_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $B_2 = (e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ de E_1 et de E_2 , dont la réunion $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ fournit une base orthonormale de E.

On désigne respectivement par I_1 , I_2 et I les applications identiques de E_1 , E_2 et E et par les mêmes symboles les matrices-unités associées.

On suppose données une application linéaire f de E_1 dans E_2 et une application linéaire g de E_2 dans E_1 telles que, pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de E_1 et E_2

$$(1) \qquad (f(x_1) \mid x_2) = (x_1 \mid g(x_2)) \ .$$

L'objectif du problème est d'étudier l'endomorphisme φ de l'espace E qui, à tout élément x de E, écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ (où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$) , associe

$$(2) \qquad \varphi(x) = kx_1 + f(x_1) + g(x_2) \ ,$$

où k est un nombre réel donné.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

Dans la première partie, on détermine la matrice associée à φ ainsi que le noyau et l'image de cet endomorphisme φ . Dans la troisième partie, on étudie les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ dans le cas où le réel k est nul et, dans la quatrième partie, les valeurs propres et les sous-espaces propres lorsque ce réel k est non nul. La deuxième partie est consacrée à l'étude, utile pour la suite, des valeurs propres et des sous-espaces propres des applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

PARTIE I

I - 1 Matrice associée à φ

a) Soit S la matrice associée à f dans les bases B_1 et B_2 ; déterminer en fonction de S la matrice associée à g dans ces bases B_2 et B_1 .

b) Montrer que, f étant donnée, il existe une application linéaire g et une seule satisfaisant à la relation (1).

c) Exprimer, à l'aide des matrices I_1 et S, la décomposition par blocs de la matrice T associée à φ , dans la base B.

I - 2 Etude des noyaux et des images de f et de g

a) Montrer : $\quad \text{Ker } f = (\text{Im } g)^{\perp} \cap E_1$,

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{Ker } g = (\text{Im } f)^{\perp} \cap E_2$.

b) En déduire que E_1 est somme directe orthogonale de Ker f et Im g.

Prouver que l'injectivité de f équivaut à la surjectivité de g, et que dans ces conditions $p \leqslant n-p$.

c) Enoncer des résultats analogues pour les sous-espaces vectoriels Ker g et Im f .

d) En utilisant a), exprimer $(\text{Ker } f)^{\perp}$ et $(\text{Ker } g)^{\perp}$ à l'aide de Im g et Im f .

I - 3 Etude du noyau de φ

a) On suppose $k = 0$. Exprimer le noyau Ker φ à l'aide de Ker f et de Ker g .

b) On suppose $k \neq 0$. Déterminer le noyau de φ . Pour cela, on considèrera un élément x de Ker φ, écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ et on prouvera que x_1 appartient à Ker f $\cap$ Im g .

I - 4 Etude de l'image de φ

a) Prouver que l'endomorphisme φ est symétrique.

b) En déduire Im φ à l'aide de Im f et de Im g .

.../...

PARTIE II

Valeurs propres et vecteurs propres de g ∘ f et f ∘ g

Pour tout nombre réel λ , on note

$$U_\lambda = \mathrm{Ker}\ (\lambda\ I_1 - g\circ f)\ ,$$

$$V_\lambda = \mathrm{Ker}\ (\lambda\ I_2 - f\circ g)\ ,$$

$$F_\lambda = \mathrm{Ker}\ (\lambda I - \varphi)\ .$$

II - 1 Indiquer des propriétés des valeurs propres et des sous-espaces propres F_λ de φ .

II - 2 a) Montrer que g ∘ f est un endomorphisme symétrique de E_1 et que les valeurs propres de cet endomorphisme sont réelles et positives.

b) Etudier de même les valeurs propres de f ∘ g.

II - 3 Prouver les deux relations

$$U_0 = \mathrm{Ker}\ f \quad \text{et} \quad V_0 = \mathrm{Ker}\ g\ .$$

II - 4 a) Soit λ un nombre réel <u>non nul</u> . Montrer que λ est valeur propre de g ∘ f si et seulement si λ est valeur propre de f ∘ g ;

établir $f(U_\lambda) \subset V_\lambda$ et $g(V_\lambda) \subset U_\lambda$.

b) Démontrer que si le réel λ est une valeur propre non nulle de g ∘ f , les deux inclusions précédentes sont des égalités.

Comparer les dimensions de U_λ et V_λ .

II - 5 <u>Etude d'un exemple</u>.

On suppose p = 3 , n = 4 et S = (a, b, c) où a, b, c sont trois réels donnés vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ∘ g et de g ∘ f et vérifier les résultats précédemment obtenus.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

PARTIE III

Valeurs propres et vecteurs propres de φ lorsque $k = 0$

On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels propres F_λ de φ en fonction des sous-espaces vectoriels propres U_λ de $g \circ f$ et de V_0 ; le réel k est nul dans cette partie.

III - 1 Exprimer F_0 à l'aide de U_0 et V_0. En déduire que φ est un automorphisme de E si et seulement si f est un isomorphisme de E_1 sur E_2 .

III - 2 On désigne par σ la symétrie de E, associée à la décomposition de E en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, définie par $\sigma(x) = x_1 - x_2$ lorsque $x = x_1 + x_2$.

a) Montrer : $\varphi \circ \sigma = -\sigma \circ \varphi$.

b) En déduire : pour tout réel λ , $\sigma(F_\lambda) = F_{-\lambda}$.

c) En déduire que les valeurs propres non nulles de φ sont deux à deux opposées et comparer les dimensions des deux sous-espaces propres de φ correspondants.

III - 3 Soit λ un nombre réel non nul. On note h_λ l'application de E_1 dans E définie par : $h_\lambda(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1) \right]$.

a) Prouver que $F_\lambda = h_\lambda\left(U_{\lambda^2}\right)$. (On pourra établir successivement les deux inclusions opposées.)

b) Montrer que, pour tout couple (x_1 , y_1) d'éléments de U_{λ^2} ,

$$(h_\lambda(x_1) \mid h_\lambda(y_1)) = (x_1 \mid y_1) .$$

c) En déduire que λ est valeur propre de φ si et seulement si λ^2 est valeur propre de $g \circ f$.

III - 4 a) Etablir que E est somme directe orthogonale des sous-espaces vectoriels Ker f , Ker g , $F_{\sqrt{\mu}}$ et $F_{-\sqrt{\mu}}$ où μ parcourt l'ensemble des valeurs propres non nulles de $g \circ f$.

b) On se place dans le cas particulier où f est un isomorphisme de E_1 sur E_2 . Alors $n = 2p$.

On désigne par F_+ (respectivement par F_-) la somme directe des sous-espaces propres $F_{\sqrt{\mu}}$ (respectivement des sous-espaces propres $F_{-\sqrt{\mu}}$) où μ décrit l'ensemble des valeurs propres de $g \circ f$.

.../...

A partir d'une base orthonormale B_1' de vecteurs propres de $g \circ f$, construire une base B_+' de F_+ et une base B_-' de F_- .

En déduire une base B' orthogonale de vecteurs propres de φ .

c) On se place toujours dans le cas où f est un isomorphisme de E_1 sur E_2 .

Exprimer la matrice de passage Q de B à B' en fonction de la matrice de passage P de B_1 à B_1' , de la matrice S et d'une matrice D diagonale dont l'ensemble des éléments diagonaux est égal à celui des valeurs propres de $g \circ f$.

PARTIE IV

Valeurs propres et vecteurs propres de φ lorsque $k \neq 0$

Dans cette partie le réel k est différent de 0 .

IV - 1 a) Déterminer F_0 ; à quelle condition le réel 0 n'est pas valeur propre de φ ?

b) Déterminer F_k ; à quelle condition le réel k n'est pas valeur propre de φ ?

c) Démontrer que si λ est une valeur propre de φ différente de 0 et de k, les éléments, différents de 0, de F_λ ont des composantes simultanément différentes de 0 .

IV - 2 a) Soit λ un réel différent de 0 et de k ; établir, avec les notations de la question III - 3 :

$$F_\lambda = h_\lambda\left(U_{\lambda(\lambda-k)}\right) .$$

b) Montrer que k/2 ne peut être valeur propre et que les valeurs propres de φ vérifient des inégalités simples.

IV - 3 a) Exprimer $\varphi \circ \sigma + \sigma \circ \varphi$ à l'aide de σ et de I .

b) Soit λ une valeur propre de φ différente de 0 et de k .

Etablir que le réel $k-\lambda$ est valeur propre de φ en montrant qu'il existe un réel a_λ tel que :

$$(a_\lambda\ I + \sigma)(F_\lambda) \subset F_{k-\lambda}$$

IV - 4 En déduire la liste des sous-espaces propres F_λ de φ dont la somme directe orthogonale est égale à E .

FIN DU PROBLEME

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail